Math. Beschreibung von Schwingungen: S. 110, 1-3 + 5

Seite **110**

3.1.3 Gesetze der harmonischen Schwingung

1 Eine harmonische Schwingung hat die Amplitude $\hat{y} = 10$ cm und die Periodendauer $T = 2{,}0$ s.

a) Stellen Sie die Werte der Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung für die Zeiten $t = n\,T/8$ (für $n = 0, 1, \ldots, 8$) in einer Tabelle zusammen.

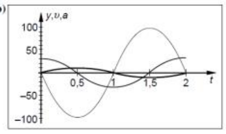
b) Zeichnen Sie die Graphen der drei Größen in Abhängigkeit von der Zeit (Maßstab $T = 12$ cm).

Lösung:
Es ist $y = \hat{y} \sin \omega t$, $v = \omega \hat{y} \cos \omega t$ und $a = -\omega^2 \hat{y} \sin \omega t$ mit $\omega = 2\pi/T$

a)

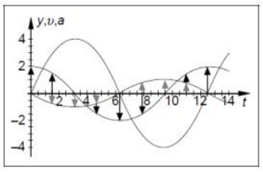
t in s	y in cm	v in cm/s	a in cm/s^2
0	0	31.4	0
0.25	7.07	22.2	– 69.8
0.5	10.	0	– 98.7
0.75	7.7	– 22.2	– 69.8
1.	0	– 31.4	0
1.25	– 7.07	– 22.2	69.8
1.5	– 10.	0	98.7
1.75	– 7.07	22.2	69.8
2.	0	31.4	0

b)



2 Zeichnen Sie das Zeit-Weg-Diagramm eines harmonischen Oszillators mit $D = 0{,}5\,\text{N/m}$, $m = 2{,}0$ kg und $\hat{y} = 4{,}0$ cm und tragen Sie maßstäblich die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungsvektoren für die Zeiten $t = n\,T/8$ (für $n = 0, 1, \ldots, 8$) ein (Maßstab $T = 12$ cm).

Lösung:
Aus $\omega^2 = D/m$ folgt $\omega = 0{,}5\,\text{s}^{-1}$.
Mit $t = n\,T/8$ und $T = 2\pi/\omega$ folgt
$\omega t = n \cdot \pi/4$.
Daraus ergeben sich folgende Funktionen:
$y = 4\,\text{cm} \cdot \sin(0{,}5\,t)$, $v = 2\,\text{cm/s} \cdot \cos(0{,}5\,t)$ und
$a = -1\,\text{cm/s}^2 \cdot \sin(0{,}5\,t)$.



3 Die Elongation eines harmonischen Oszillators beträgt 0,2 s nach dem Nulldurchgang $y = 4$ cm. Die Amplitude ist 6 cm. Berechnen Sie Frequenz und Periodendauer.

Lösung:
Aus $y = \hat{y} \sin \omega t$ folgt
$4\,\text{cm} = 6\,\text{cm} \sin(\omega \cdot 0{,}2\,\text{s})$, also
$\omega = 5\,\text{s}^{-1} \arcsin(4/6) = 3{,}64\,\text{s}^{-1}$.
Daraus ergeben sich
$T = 1{,}72$ s und $f = 0{,}58\,\text{s}^{-1}$.

***5** Zeigen Sie, dass auch die Zeit-Elongation-Funktion $y = \hat{y} \cos(\omega t + \alpha)$ die Differentialgleichung $m\ddot{y} = -D\,y$ erfüllt.

Lösung:
Aus $y = \hat{y} \cos(\omega t + \alpha)$ folgt
$\dot{y} = -\omega \hat{y} \sin(\omega t + \alpha)$ und
$\ddot{y} = -\omega^2 \hat{y} \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 y$.
Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt
$-m\omega^2 y = -Dy$,
d.h. mit $\omega^2 = D/m$ ist die Differentialgleichung durch $y = \hat{y} \cos(\omega t + \alpha)$ zu jedem Zeitpunkt t erfüllt.

Gedämpfte Schwingungen: S. 111, 1-4

***1** Im Schattenwurf misst man die Amplitude $\hat{y}$ der 1., 50., 100., … Schwingung mit der Periodendauer $T = 0{,}8$ s.

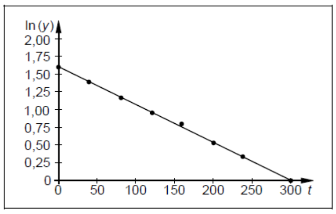
n	1	50	100	150	200	250	300
$\hat{y}$ in cm	5,0	4,0	3,2	2,6	2,2	1,7	1,4

a) Ermitteln Sie die Dämpfungskonstante k aus der Darstellung des natürlichen Logarithmus der Amplitude.

b) Berechnen Sie aus den Versuchsdaten die Halbwertszeit der Schwingung.

Lösung:

a) Für gedämpfte Schwingungen gilt:
$y = \hat{y}\,e^{-kt}$ bzw. $\ln\{y\} = \ln\{\hat{y}\} - k\,t$



Aus der graphischen Darstellung ergibt sich $k = 5{,}28 \cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$.

b) Die Halbwertzeit ergibt sich aus dem Ansatz $0{,}5 \cdot \hat{y} = \hat{y}\,e^{-kt_H}$ oder $t_H = \ln 2/k = 131$ s.

2 Die Amplituden der 3. und 4. Schwingung eines Pendels betragen 8 cm bzw. 7 cm. Wie groß ist die Amplitude der 1. Schwingung?

Lösung:
Für die Amplitude der n. Schwingung gilt
$\hat{y}_n = \hat{y}_0\,e^{-k(n-1)T}$ oder $\hat{y}_n = \hat{y}_0\,q^{n-1}$ mit $q = e^{-kT}$.

3 Die Amplitude der 10. Schwingung eines gedämpften Oszillators ist halb so groß wie die Amplitude der 1. Schwingung. Bei der wievielten Schwingung beträgt die Amplitude ein Zehntel des Anfangswertes?

Lösung:
Nach dem Ansatz aus *Aufgabe* 2 folgt $\hat{y}_{10} = \hat{y}_0 q^9$ oder $0{,}5 = q^9$ und $q = 0{,}926$.
$\hat{y}_n = \frac{1}{10}\hat{y}_0 = \hat{y}_0\,q^{n-1}$; $\log 0{,}1 = (n-1)\log q$;
$n = 1 = 29{,}94 \approx 30$, $n = 31$.
Es ist $\hat{y}_4 : y_3 = q = 7 : 8 = 0{,}875$;
aus $\hat{y}_3 = \hat{y}_0 \cdot q^2$ folgt $\hat{y}_0 = 10{,}45$ cm.

Nr. 4 entfällt, da sie programmiertechnische Kenntnisse erfordert, die wenige im Kurs nur haben!

Faden- und Federpendel: S. 113, 1-7, Lösungen

1 Eine Kugel der Masse $m = 2{,}0$ kg hängt an einem leichten Faden der Länge $l = 2{,}40$ m (Schwerependel).

a) Berechnen Sie die Periodendauer T für einen Ort, an dem die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ beträgt.

b) An einem anderen Ort misst man mit demselben Pendel die Schwingungsdauer $T = 3{,}12$ s. Wie groß ist dort die Erdbeschleunigung?

Lösung:
a) $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 3{,}108$ s.

b) $g = \frac{4\pi^2}{T^2} l$ liefert $g = 9{,}73\ \mathrm{m/s^2}$

2 Die Länge eines Sekundenpendels – das ist ein Pendel, das für eine Halbschwingung eine Sekunde braucht – beträgt am Äquator $l_1 = 99{,}09$ cm, am Pol $l_2 = 99{,}61$ cm und auf 45° Breite $l_3 = 99{,}35$ cm. Berechnen Sie die zugehörigen Erdbeschleunigungen.

Lösung:
Mit $T = 2$ s und $g = 4\pi^2 l/T$ folgt:
$g_{\text{Äquator}} = 9{,}780\ \mathrm{m/s^2}$; $g_{\text{Pol}} = 9{,}831\ \mathrm{m/s^2}$;
$g_{45} = 9{,}805\ \mathrm{m/s^2}$.

3 Bei einem Federpendel sind $f = 8$ Hz und $D = 380$ N/m. Wie groß ist m?

Lösung:
Mit $T = 1/f$ und $T = 2\pi\sqrt{m/D}$ ergibt sich
$m = D/(4\pi f^2) = 150$ g.

Korrektur:

$4\cdot\pi^2$!

4 Bei einem Federpendel wird die Periodendauer T dreimal so groß, wenn die angehängte Masse m um $\Delta m = 50$ g vergrößert wird. Wie groß ist die ursprüngliche Masse m?

Lösung:
Aus $T = 2\pi\sqrt{m/D}$ und $3\,T = 2\pi\sqrt{(m+\Delta m)/D}$

folgt $3 = \sqrt{\frac{m+\Delta m}{m}}$, $m = \frac{\Delta m}{8} = 6{,}25$ g.

5 Wie groß wird die Periodendauer, wenn bei gleicher Masse m zwei Federn mit den Konstanten D_1 und D_2 aneinander gehängt werden? (Berechnen Sie zuerst die Federkonstante der Kombination.)

Lösung:
Bewirkt die Kraft F bei den Federn mit den Federkonstanten D_1 und D_2 die Verlängerungen y_1 und y_2, so werden die aneinander gehängten Federn mit den neuen Federkonstanten D um $y_1 + y_2$ verlängert (Gewichtskraft der unteren Feder vernachlässigt). Aus $F = D(y_1 + y_2)$, $y_1 = F/D_1$ und $y_2 = F/D_2$, folgt für die Federkombination $1/D = 1/D_1 + 1/D_2$.

Einsetzen in $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ ergibt $T = 2\pi\sqrt{\frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2}}$.

6 Eine an einer Feder hängende Kugel ($m = 2{,}0$ kg), die um 2,0 cm nach unten ausgelenkt und dann sich selbst überlassen wurde, schwingt mit der Frequenz $f = 4$ Hz.

a) Wie groß ist die Richtgröße D der Feder?

b) Wie weit dehnt sich die Feder, wenn die Kugel vor Beginn der Schwingung angehängt wird?

c) Wie groß ist die auf die Kugel wirkende Kraft in den Umkehrpunkten der Schwingung?

Lösung:
a) Es ist $D = 4\pi^2 f^2 = 1{,}263$ N/m.

b) Aus $y_0 = F/D$ folgt mit $F = m\,g$ eine Ausdehnung von $y_0 = 1{,}55$ cm (siehe *Abb. 113.1*).

c) In den Umkehrpunkten wirkt die Kraft
$F = -D\hat{s} = 25{,}26$ N; mit $F = m\hat{a}$ und $\hat{a} = \omega^2\hat{y}$ und $m = 2$ kg: $F = 25{,}26$ kg.

Korrektur:

$4\cdot\pi^2\cdot f^2\cdot m$!

***7** In einem U-Rohr konstanten Querschnitts befindet sich eine Flüssigkeitssäule der Gesamtlänge l. Berechnen Sie die Periodendauer der Schwingung, die entsteht, wenn man kurz in das eine Rohrende bläst. Zeigen Sie, dass die Periodendauer nur von der Länge der Flüssigkeitssäule abhängt. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Schwingungszustand, in dem die Flüssigkeitssäule in dem einen Rohr z. B. um die Strecke y_0 gestiegen, in dem anderen dann um die Strecke y_0 gesunken ist, und bestimmen Sie die rücktreibende Kraft.)

Lösung:
Steigt die Flüssigkeitssäule auf der einen Seite um y_0, so sinkt sie auf der anderen Seite um die gleiche Strecke, und es wirkt als rücktreibende Kraft die Gewichtskraft der $h = 2y_0$ Flüssigkeitssäule $F = G = m\,g = \varrho V g = \varrho\, g \cdot 2A\, y_0$.
Es ist $D = F/y_0 = 2A\varrho g$ und man erhält mit $m = lA\varrho$ (Masse der gesamten Flüssigkeitssäule mit der Länge l) die Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{m/D}$ $= 2\pi\sqrt{l/(2g)}$.

Energie: S. 119, 1 und 2

Resonanz: S. 121 1, 2 (3)

Elektrische Schwingungen: S. 275, 1 + 2; S. 277, 1, 3, 4